OPTION A

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Problème

Le but du problème est la démonstration d'un théorème de Von Neuman (1940) à la base de la théorie des jeux matriciels. La première partie est essentiellement constituée de deux exemples traités élémentairement.

Les composantes x_i (i=1...p) d'un vecteur x de IR^p sont toujours comprises comme celles relatives à la base canonique $B=\{e_i | i=1...p\}$; la notation $x\geq 0$ signifie $x_i \geq 0$ pour tout i=1...p . Dans les expressions matricielles, comme usuellement, les vecteurs sont spontanément écrits au moyen des matrices unicolonnes x de leurs composantes. Pour les faire apparaître en ligne on utilise la transposée ${}^t x$ de ces matrices unicolonnes qui donnent donc des matrices unilignes.

Δ_p désigne le simplexe unité de IR^p c'est-à-dire l'ensemble des x de IR^p dont les composantes x_i vérifient $\sum_{i=1}^{p} x_i = 1$ et $x_i \geq 0$ pour tout i=1...p .

On pourra avant de commencer le problème répondre à la question suivante.

Une fonction affine de IR^p dans IR peut-elle présenter un extremum sur un ouvert ?

I. Exemple 1

A la matrice 2 lignes, 3 colonnes $M=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ est associée la fonction f définie pour $x \in \Delta_2$ et $y \in \Delta_3$ par $f(x,y)={}^t xMy$.

1°) Tracer le graphe de la fonction $g(\xi)=\max(8\xi-1, 4\xi+1, 2-\xi)$ pour $\xi \in [0,1]$ puis trouver $\min_{\xi\in[0,1]} g(\xi)$ et le point $\bar{\xi}$ où ce minimum est obtenu.

Justifier l'égalité $\max_{y\in\Delta_3} f(x,y) = \max_{i=1,2,3} f(x,e_i)$. En déduire la valeur de $\min_{x\in\Delta_2}\left(\max_{y\in\Delta_3} f(x,y)\right)$.

2°) Pour η_1 et $\eta_2 \in [0,1]$ on pose $h(\eta_1,\eta_2)=\min(6\eta_1+4\eta_2+1, -3\eta_1-\eta_2+2)$.

Trouver $\max_{\eta_1 \text{ et } \eta_2 \in [0,1]} h(\eta_1,\eta_2)$ et le point $(\overline{\eta}_1,\overline{\eta}_2)$ où ce maximum est obtenu. Justifier l'égalité $\min_{x\in\Delta_2} f(x,y) = \min_{i=1,2} f(e_i,y)$. En déduire la valeur de $\max_{y\in\Delta_3}\left(\min_{x\in\Delta_2} f(x,y)\right)$.

3°) Trouver un point $(\overline{x},\overline{y}) \in \Delta_2 \times \Delta_3$ satisfaisant

$$f(\overline{x},\overline{y}) = \min_{x\in\Delta_2}\left(\max_{y\in\Delta_3} f(x,y)\right) = \max_{y\in\Delta_3}\left(\min_{x\in\Delta_2} f(x,y)\right).$$

Remarques générales

Plus généralement M est une matrice à m lignes et n colonnes et f la fonction de $\Delta_m \times \Delta_n$ définie par $f(x,y)={}^t xMy$.

1°) Montrer que s'il existe $(\overline{x},\overline{y}) \in \Delta_m \times \Delta_n$ satisfaisant pour tout x de Δ_m et tout y de Δ_n

(1) $$f(\overline{x},y) \le f(\overline{x},\overline{y}) \le f(x,\overline{y})$$

on a aussi $$f(\overline{x},\overline{y}) = \min_{x\in\Delta_m}\left(\max_{y\in\Delta_n} f(x,y)\right) = \max_{y\in\Delta_n}\left(\min_{x\in\Delta_m} f(x,y)\right). \qquad (2)$$

2°) Montrer que réciproquement si l'on a $\min_{x\in\Delta_m}\left(\max_{y\in\Delta_n} f(x,y)\right) = \max_{y\in\Delta_n}\left(\min_{x\in\Delta_m} f(x,y)\right)$, il existe un point $(\overline{x},\overline{y}) \in \Delta_m \times \Delta_n$ satisfaisant **(1)**. On pourra utiliser, sans justification, la continuité des fonctions $s(x) = \max_{y\in\Delta_n} f(x,y)$ et $m(y) = \min_{x\in\Delta_m} f(x,y)$ sur respectivement Δ_m et Δ_n.

3°) Montrer que s'il existe $(\overline{x},\overline{y}) \in \overset{\circ}{\Delta}_m \times \overset{\circ}{\Delta}_n$ ($\overset{\circ}{\Delta}_m$ (resp. $\overset{\circ}{\Delta}_n$) désigne l'intérieur relatif de Δ_m dans $\mathbb{R}^m$ (resp. de Δ_n dans $\mathbb{R}^n$)) satisfaisant **(1)** on a

(3) $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x},\overline{y}) = \frac{\partial f}{\partial x_m}(\overline{x},\overline{y}) \quad \forall i = 1\ldots m-1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y_j}(\overline{x},\overline{y}) = \frac{\partial f}{\partial y_n}(\overline{x},\overline{y}) \quad \forall j = 1\ldots n-1 .$$

4°) Montrer que réciproquement si **(3)** est vérifiée pour un point $(\overline{x},\overline{y}) \in \overset{\circ}{\Delta}_m \times \overset{\circ}{\Delta}_n$ on obtient **(1)** avec des égalités.

Exemple 2

Trouver un point $(\overline{x},\overline{y}) \in \Delta_3 \times \Delta_3$ réalisant **(2)** dans le cas où

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

sachant que l'on peut trouver ce point dans $\mathring{\Delta}_3 \times \mathring{\Delta}_3$.

II. **A.** F est un convexe fermé non vide de IR^n , a un point de IR^n n'appartenant pas à F .

1°) En considérant la fonction $x \to \|x-a\|$ (la norme euclidienne du vecteur x-a) justifier l'existence d'un unique point $\bar{a} \in F$ tel que $\|\bar{a}-a\| = \min_{x \in F} \|x-a\|$.

2°) On note $v = a - \bar{a}$ et pour x quelconque dans F et t réel

$$\varphi_x(t) = \|tx + (1-t)\bar{a} - a\|^2 .$$

Calculer $\varphi'_x(0)$. En déduire que : $\operatorname{Sup}_{x \in F} \langle x-a, v \rangle \leq -\|v\|^2$

($\langle x,y \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de IR^n du vecteur x par le vecteur y).

En conclure que si $a \notin F$ il est possible de trouver un vecteur unitaire w et un réel α tels que $\operatorname{Sup}_{x \in F} \langle x,w \rangle < \alpha < \langle a,w \rangle$.

B. C est un convexe non vide de IR^n non nécessairement fermé et b un point du bord de C (c'est-à-dire b appartient à l'adhérence de C mais pas à l'intérieur de C).

Justifier l'existence d'une suite $(a_k)_k$ de points du complémentaire de l'adhérence de C convergent vers b *[On admettra, sans démonstration, que pour un convexe l'intérieur de l'adhérence coïncide avec l'intérieur].* En utilisant le résultat de **A.** pour chaque a_k , montrer qu'il est possible de trouver un vecteur unitaire w tel que pour tout x de C on ait

$$\langle x-b, w \rangle \leq 0 .$$

C. Soit A une matrice de n lignes et m colonnes. On identifie cette matrice à l'endomorphisme de IR^m dans IR^n dont A est la matrice dans les bases canoniques. On note

$$C = \left\{ z - Ax \middle| z \in IR^n z > 0, x \in IR^m x \geq 0 \right\} .$$

On suppose $0 \notin C$, en appliquant **B.** montrer qu'il existe un vecteur w , de IR^n, unitaire négatif ou nul tel que :

$$\forall z > 0 \left(z \in IR^n\right) \ \forall x \geq 0 \left(x \in IR^m\right) \ \langle z,w \rangle \leq \langle Ax,w \rangle .$$